Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 1

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 1-2i & -2+i \\ 1+2i & -2-i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 10x_2x_3 - 5x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz - 1 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 2

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+2i & 3-2i \\ -2-3i & -2+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2^2 + 24x_2x_3 + 12x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 3

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3-i & -1+3i \\ 3+i & -1-3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 8x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 2y + 2z = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 4

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -1+2i & 2-i \\ -1-2i & 2+i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz + 3x + 3y - 3z = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 5

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3-2i & -3+2i \\ 2+3i & 2-3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 6

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3+i & 1-3i \\ -3-i & 1+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 7

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i \\ -2-i & -2+i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2, \\ g &= x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 8

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3-2i & -2+3i \\ 3+2i & -2-3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 9

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+i & 3-i \\ -1-3i & -1+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + \frac{7}{2}x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 10

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -1-2i & -1+2i \\ 2+i & 2-i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + \frac{7}{2}x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2,$$
$$g = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 11

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3+2i & 2-3i \\ -3-2i & 2+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \frac{3}{2}x_2^2 - 4x_2x_3 + 7x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)

Вариант 12

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3-i & -3+i \\ 1+3i & 1-3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 5x_2^2 + 6x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 13

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -2+i & 1-2i \\ -2-i & 1+2i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 14

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+i & -1-3i \\ 3-i & -1+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$\begin{aligned} f &= \; -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 + 3x_3^2, \\ g &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 15

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2×2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 2+i & -1-2i \\ 2-i & -1+2i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -2 & 14 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2^2 + 12x_2x_3 + 21x_3^2, \\ g &= -x_1^2 - 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2^2 - 9x_3^2. \end{aligned}$$

7. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0$

8*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$